

Automorphism groups of Fano conic bundle threefolds

名古屋大学 多元数理科学研究科 多元数理科学専攻 博士後期課程 1 年
阿部秀斗 (Shuto ABE) *

概要

X を滑らかな $(2, 2)$ -因子で分岐する $\mathbb{P}^1 \times \mathbb{P}^2$ の 2 重被覆とする。このとき, X は №2.18 の 3 次元ファノ多様体である。№2.18 の 3 次元ファノ多様体の同型類をパラメーター付けするモジュライ空間を考えることで、一般の №2.18 の 3 次元ファノ多様体の自己同型群が位数 2 の巡回群であることを示した。また、いくつかの特殊な №2.18 の 3 次元ファノ多様体の自己同型群についての結果を紹介する。

1 導入

本公演では代数多様体は \mathbb{C} 上で定義されているとする。

定義 1. 滑らかな射影的代数多様体 X が **ファノ** であるとは、反標準束 $-K_X$ が豊富であることとする。

ファノ多様体の例として、低次元の超曲面が知られている。

例 2. 滑らかな次数 d の超曲面

$$\{f_d = 0\} \subset \mathbb{P}^{n+1}$$

がファノである必要十分条件は $d \leq n + 1$ である。

3 次元ファノ多様体は 105 個の族に分類される ([IP],[MM81] 参照)。[PCS19] は自己同型群が無限群となる 3 次元ファノ多様体の分類を行なっており、[Kon24] は自己同型群が有限となる 3 次元ファノ多様体のうちピカール数が 1 のものたちの自己同型群について研究を行っている。また、№1.13 と №2.21 の 3 次元ファノ多様体の自己同型群はそれぞれ [WY20] と [Mal24] で研究されている。これらのナンバリングは [IP] に基づく。

$X \rightarrow \mathbb{P}^1 \times \mathbb{P}^2$ を滑らかな $(2, 2)$ -因子

$$Q_1 t_0^2 + 2Q_2 t_0 t_1 + Q_3 t_1^2 = 0 \subset \mathbb{P}_{[t_0:t_1]}^1 \times \mathbb{P}^2$$

で分岐する 2 重被覆とする。ここで、 $Q_1, Q_2, Q_3 \in \mathbb{C}[x, y, z]$ は 2 次の齊次多項式である。このとき、 X は 3 次元ファノ多様体であり、 X は №2.18 の 3 次元ファノ多様体とよばれる ([IP])。本公演では №2.18 の 3 次元ファノ多様体の自己同型群についての研究を紹介する。

* E-mail:shuto.abe.c6@math.nagoya-u.ac.jp

№2.18 の 3 次元ファノ多様体の自己同型群について次のことが知られている.

命題 3. ([PCS19, Lemma 8.2]) №2.18 の 3 次元ファノ多様体の自己同型群は有限群である.

$\mathbb{P}^1 \times \mathbb{P}^2$ の $(2, 2)$ -因子を用いて №2.18 の 3 次元ファノ多様体のモジュライを考えることができる.

命題 4. ([DJK⁺24, Proposition 9.3], [A25, Proposition 4.17]) ある空でない Zariski 開集合

$$M_{(2,2)}^{sm} \subset M_{(2,2)} = |\mathcal{O}_{\mathbb{P}^1 \times \mathbb{P}^2}(2, 2)|^{ss} // \mathrm{SL}_2 \times \mathrm{SL}_3$$

は №2.18 の 3 次元ファノ多様体の同型類をパラメータ付けする. ここで, $M_{(2,2)}^{sm}$ はある 6 次元の代数多様体である.

2 主定理

一般の №2.18 の 3 次元ファノ多様体の自己同型群は位数 2 の巡回群であることを明らかにした:

定理 5. ([A25, Theorem 1.4]) ある空でない Zariski 開集合 $U \subset M_{(2,2)}^{sm}$ が存在して, すべての $X \in U$ に対して,

$$\mathrm{Aut}(X) \cong \mathbb{Z}/2\mathbb{Z}$$

が成立する.

№2.18 の 3 次元ファノ多様体は有理的代数多様体である. ここで, n 次元代数多様体 X が有理的であるとは, X と \mathbb{P}^n が双有理同値であることである.

定義 6. X を n 次元の有理的代数多様体, G を有限群, G は X に作用するとする. このとき, X が G -同変有理的であるとは, G -同変な双有理射 $X \xrightarrow{G} \mathbb{P}^n$ が存在することとする.

定理 5 の応用として, [CTT24, Example 5.14] より, 次の系を得る:

系 7. ([A25, Corollary 1.5]) ある空でない Zariski 開集合 $U \subset M_{(2,2)}^{sm}$ が存在して, すべての $X \in U$ に対して, X は $\mathrm{Aut}(X)$ -同変有理的である.

参考文献

- [A25] S. Abe, *Automorphism Groups and Linearizability of Rational Fano Conic Bundles*, Taiwanese J. Math. 29 (6), 1061-1106.
- [CTT24] T. Ciurca, S. Tanimoto, and Y. Tschinkel, *Intermediate jacobians and linearizability*, arXiv:2403.06047, 2024, Kyoto J. of Math., to appear.
- [DJK⁺24] K. DeVleming, L. Ji, P. Kennedy-Hunt, and M. H. Quek, *The K-moduli space of a family of conic bundle threefolds*, arXiv:2403.09557, 2024.
- [IP] V. Iskovskikh and Yu. Prokhorov, *Fano varieties*. Algebraic Geometry V, Encyclopaedia Math. Sci., 47, Springer-Verlag, Berlin, 1999.

- [Mal24] J. Malbon, *Automorphisms of Fano threefolds of rank 2 and degree 28*, Ann. Univ. Ferrara Sez. VII Sci. Mat. **70** (2024), no. 3, 1083–1092.
- [Kon24] N. Konovalov, *On the automorphism groups of smooth Fano threefolds*. arXiv:2406.03584, 2024.
- [MM81] S. Mori and S. Mukai, *Classification of Fano 3-folds with $B_2 \geq 2$* , Manuscripta mathematica **36** (1981), no. 2, 147–162.
- [PCS19] V. V. Przyjalkowski, I. A. Cheltsov, and K. A. Shramov, *Fano threefolds with infinite automorphism groups*. Izv. Ross. Akad. Nauk Ser. Mat., 83(4):226-280, 2019.
- [WY20] L. Wei and X. Yu, *Automorphism groups of smooth cubic threefolds*. J. Math. Soc. Japan., 72(4):1327-1343, 2020.